

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients achetant un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients n'achetant pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement : « le client achète un melon au cours de la semaine n » et $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

2. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_n > 0,8$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c. La suite (p_n) est-elle convergente ?

3. On pose pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = p_n - 0,8$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n) .